



Analisis Dinamik Model Logistik Diskrit Nonlinier Berbasis Simulasi Komputasi dan Bifurkasi

Haves Qausar^{1,*}, Zata Hasyati²

¹Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Malikussaleh, Aceh Utara, Indonesia

²Fakultas Ekonomi dan Bisnis, Program Studi Ekonomi Pembangunan, Universitas Malikussaleh, Aceh Utara, Indonesia

Email: ^{1,*}haves@unimal.ac.id, ²zatahasyyati@unimal.ac.id

Email Penulis Korespondensi: haves@unimal.ac.id

Abstrak—Model logistik diskrit merupakan model nonlinier sederhana yang mampu menghasilkan dinamika stabil, periodik, dan *chaos*, tetapi identifikasi *chaos* sering hanya didasarkan pada visualisasi orbit atau diagram bifurkasi. Penelitian ini bertujuan menganalisis perubahan dinamika model logistik diskrit secara terpadu sehingga klasifikasi perilakunya didukung oleh hasil analitik dan indikator komputasional. Penelitian ini merupakan kajian pemodelan matematis dan simulasi komputasi, sehingga tidak melibatkan responden maupun lokasi penelitian lapangan. Model dianalisis dengan parameter kendali r , yaitu parameter yang mengatur perubahan dinamika, pada rentang 0 sampai 4, nilai awal 0.2, 1000 iterasi, dan pengabaian 500 iterasi awal sebagai fase transien. Teknik analisis meliputi kestabilan lokal, simulasi deret waktu, diagram bifurkasi, eksponen Lyapunov, dan sensitivitas terhadap kondisi awal. Hasil menunjukkan bahwa titik tetap nol stabil untuk $0 < r < 1$, titik tetap nonnol stabil untuk $1 < r < 3$, dan bifurkasi pertama terjadi pada $r = 3$. Orbit periode-2, periode-4, dan periode-8 muncul berturut-turut pada $r = 3.2$, $r = 3.5$, dan $r = 3.55$. Pada $r = 3.8$, eksponen Lyapunov bernilai 0.4146 dan dua orbit dengan selisih awal 10^{-6} mengalami divergensi, sehingga mendukung identifikasi dinamika *chaos*. Sebaliknya, pada $r = 3.83$ muncul orbit periode-3 dengan eksponen Lyapunov -0.3724 sebagai *periodic window*. Penelitian ini menghasilkan kerangka evaluasi komputasional yang sistematis dan dapat direplikasi untuk menganalisis dinamika model diskrit nonlinier.

Kata Kunci: Model Logistik Diskrit; Dinamika Nonlinier; Simulasi Komputasi; Diagram Bifurkasi; Eksponen Lyapunov; Sensitivitas Kondisi Awal

Abstract—The discrete logistic model is a simple nonlinear model capable of producing stable, periodic, and chaotic dynamics; however, chaos identification is often based only on orbit visualisation or bifurcation diagrams. This study aims to analyse its dynamics using analytical results and computational indicators. This study applies mathematical modelling and computational simulation; therefore, it involves neither respondents nor a field research location. The model was analysed using the control parameter r , which determines changes in the system dynamics, from 0 to 4, an initial value of 0.2, 1000 iterations, and removal of the first 500 iterations as the transient phase. The techniques comprised local stability analysis, time-series simulation, bifurcation diagrams, Lyapunov exponents, and sensitivity to initial conditions. Results show that the zero fixed point is stable for $0 < r < 1$, the nonzero fixed point is stable for $1 < r < 3$, and the first bifurcation occurs at $r = 3$. Period-2, period-4, and period-8 orbits emerge at $r = 3.2$, $r = 3.5$, and $r = 3.55$, respectively. At $r = 3.8$, the Lyapunov exponent is 0.4146, and two orbits with an initial difference of 10^{-6} diverge, supporting chaotic dynamics. Conversely, at $r = 3.83$, a period-3 orbit emerges with a Lyapunov exponent of -0.3724 as a *periodic window*. This study provides a systematic and reproducible computational evaluation framework for nonlinear discrete dynamics.

Keywords: Discrete Logistic Model; Nonlinear Dynamics; Computational Simulation; Bifurcation Diagram; Lyapunov Exponent; Sensitivity to Initial Conditions

1. PENDAHULUAN

Sistem dinamik nonlinier merupakan bidang kajian penting dalam matematika terapan dan komputasi karena dapat menjelaskan perubahan perilaku sistem yang tidak selalu berlangsung secara sederhana maupun linier. Pada sistem semacam ini, perubahan parameter dapat menyebabkan perbedaan perilaku jangka panjang yang signifikan, mulai dari keadaan stabil, osilasi periodik, bifurkasi, hingga dinamika *chaos*. Bacciotti (2022) menjelaskan bahwa pada sistem diskrit, perilaku orbit jangka panjang berkaitan erat dengan struktur fungsi iterasi dan kestabilan titik tetapnya. Dalam pembahasan yang lebih luas, Dilão (2023) menempatkan dinamika *chaos* sebagai salah satu konsekuensi penting dari interaksi nonlinier yang tetap bersifat deterministik, tetapi dapat menghasilkan perilaku jangka panjang yang sulit diprediksi. Sementara itu, Kuznetsov (2023) menegaskan bahwa bifurkasi merupakan mekanisme penting dalam menjelaskan perubahan kualitatif suatu sistem akibat variasi parameter kendali. Dengan demikian, kajian sistem diskrit nonlinier perlu diarahkan tidak hanya pada keadaan stabilnya, tetapi juga pada proses transisi yang menyebabkan munculnya perilaku dinamik yang semakin kompleks.

Perkembangan komputasi numerik memungkinkan analisis sistem nonlinier dilakukan secara lebih mendalam melalui simulasi dan visualisasi. Analisis matematis memberikan dasar untuk menentukan kondisi keseimbangan dan batas kestabilan suatu model, tetapi belum selalu cukup untuk memperlihatkan perubahan struktur dinamika pada rentang parameter yang luas. Dalam konteks ini, Zaytsev et al. (2024) menyatakan bahwa pemodelan komputasional pada sistem dinamik dapat digunakan untuk mengeksplorasi perilaku sistem melalui prosedur iteratif dan visualisasi numerik. Melalui simulasi, pola konvergensi, osilasi, percabangan orbit, dan ketidakteraturan dinamika dapat diamati secara lebih jelas. Oleh sebab itu, perpaduan antara analisis matematis dan simulasi komputasi menjadi pendekatan yang relevan untuk mengevaluasi dinamika model diskrit nonlinier secara sistematis, khususnya ketika perilaku sistem perlu dipahami melalui keterkaitan antara bukti analitik dan indikator numerik.



Salah satu model diskrit nonlinier yang banyak digunakan untuk mempelajari perubahan dinamika sistem adalah model logistik diskrit. Meskipun memiliki struktur sederhana karena hanya melibatkan satu variabel keadaan dan satu parameter kendali, model ini mampu menghasilkan pola dinamika yang beragam. Perubahan parameter pada model logistik dapat menyebabkan orbit bergerak menuju keadaan tetap, membentuk pola periodik, mengalami bifurkasi bertingkat melalui mekanisme *period-doubling*, memasuki wilayah yang didominasi *chaos*, serta kembali menunjukkan pola periodik pada interval tertentu yang dikenal sebagai *periodic windows*. De Leo dan Yorke (2021) menunjukkan bahwa dinamika model logistik tetap menjadi objek penting dalam memahami organisasi orbit dan struktur perilaku jangka panjang pada sistem satu dimensi. Sementara itu, Bucolo et al. (2022) menggunakan model logistik sebagai salah satu acuan dasar dalam pengembangan peta diskrit multidimensi karena model tersebut mampu memperlihatkan karakteristik penting sistem kompleks secara jelas. Hal tersebut menunjukkan bahwa model logistik diskrit tetap relevan sebagai model acuan untuk memahami hubungan antara kestabilan, perubahan parameter, dan kompleksitas dinamika.

Penelitian terkait dalam beberapa tahun terakhir memperlihatkan bahwa model logistik dan model diskrit turunannya terus dikembangkan untuk menganalisis perilaku nonlinier pada struktur yang lebih kompleks. Bucolo et al. (2022) mengembangkan peta diskrit multidimensi dengan memanfaatkan karakteristik model logistik satu dimensi sebagai dasar untuk mengamati pola dinamika pada sistem berdimensi lebih tinggi. Berbeda dari pendekatan tersebut, Al-Kaff et al. (2024) menggunakan dua peta logistik yang saling terhubung dalam model diskrit mangsa-pemangsa untuk menganalisis titik tetap, kestabilan, bifurkasi, dan kemunculan *chaos* akibat interaksi antar komponen. Selain itu, Xu et al. (2023) mengembangkan *fractional-order improved quantum logistic map* dan mengevaluasi perilakunya melalui diagram bifurkasi, eksponen Lyapunov, uji 0–1, serta analisis kendali. Ketiga penelitian tersebut mengembangkan struktur model logistik melalui peningkatan dimensi, penggabungan antarpeta, atau modifikasi orde dan karakteristik dinamikanya. Penelitian ini mengambil arah yang berbeda, yaitu mempertahankan model logistik diskrit standar sebagai model acuan untuk menyajikan evaluasi komputasional yang terintegrasi dan dapat direplikasi.

Pengembangan model berbasis logistik juga dilakukan melalui penambahan mekanisme kendali dan orientasi aplikasi komputasional. Suryanto et al. (2025) menganalisis model logistik waktu-diskrit yang melibatkan mekanisme pemanenan dan kendali umpan balik. Melalui analisis kestabilan, simulasi numerik, dan eksponen Lyapunov maksimum, penelitian tersebut mengidentifikasi kemunculan bifurkasi dan dinamika kompleks pada model yang telah dimodifikasi. Pada ranah aplikasi keamanan informasi, Zhao dan Ma (2024) memodifikasi *intertwining logistic map* untuk membangun pembangkit bilangan semu-acak yang dievaluasi melalui diagram bifurkasi, eksponen Lyapunov, dan ukuran kompleksitas lainnya. Sejalan dengan arah tersebut, (Alawida, 2024) mengembangkan peningkatan peta logistik untuk memperbaiki karakteristik keamanan pada pembangkitan bilangan acak. Kedua studi aplikasi tersebut menunjukkan bahwa sifat dinamik peta logistik dapat dimanfaatkan dan diperkuat untuk tujuan komputasional tertentu. Berbeda dari penelitian-penelitian tersebut, kajian ini tidak menambahkan komponen kendali dan tidak menerapkan model untuk kebutuhan aplikasi khusus, tetapi memusatkan perhatian pada keterkaitan antarindikator dinamika pada model standar.

Penguatan karakteristik *chaos* pada peta nonlinier juga dikembangkan melalui transformasi fungsi pembangkitnya. Hua et al. (2019) mengusulkan *sine chaotification model* yang menggunakan fungsi sinus sebagai transformasi nonlinier terhadap keluaran peta *chaotic* satu dimensi. Model tersebut diterapkan pada beberapa peta dasar untuk menghasilkan rentang *chaos* yang lebih luas dan perilaku dinamika yang lebih kompleks, serta diuji melalui implementasi perangkat keras dan pembangkitan bilangan semu-acak. Studi tersebut memperlihatkan bahwa model logistik dan peta nonlinier turunannya dapat dimodifikasi untuk meningkatkan performa dinamika bagi kebutuhan komputasional tertentu. Namun, berbeda dari pendekatan Hua et al. (2019), penelitian ini tidak melakukan transformasi fungsi maupun mengembangkan model baru, melainkan mempertahankan model logistik diskrit standar sebagai model acuan untuk mengevaluasi keterhubungan antara kestabilan, bifurkasi, eksponen Lyapunov, dan sensitivitas kondisi awal.

Pemanfaatan peta *chaotic* pada berbagai aplikasi komputasional semakin memperkuat pentingnya prosedur evaluasi dinamika yang memadai. Naik dan Singh (2024) menjelaskan bahwa peta *chaotic* banyak digunakan dalam pembangkitan bilangan semu-acak dan enkripsi karena memiliki karakteristik sensitivitas terhadap kondisi awal serta perilaku orbit yang kompleks. Dalam aplikasi yang lebih spesifik, Bourekouche et al. (2024) menggunakan *3D intertwining logistic map* untuk membangun algoritma enkripsi dan dekripsi citra medis. Di sisi lain, Nazish et al. (2025) mengusulkan *enhanced logistic map* untuk mendukung pembangkitan bit semu-acak dengan karakteristik *chaos* yang diperkuat. Evaluasi yang dilakukan Nazish et al. (2025) tidak hanya menggunakan diagram bifurkasi, tetapi juga melibatkan eksponen Lyapunov, pengujian sensitivitas, dan indikator kompleksitas lainnya. Penelitian-penelitian tersebut menunjukkan bahwa ketika peta logistik digunakan atau dikembangkan untuk kebutuhan komputasi, karakteristik dinamikanya perlu diperiksa melalui lebih dari satu indikator. Prinsip ini penting bagi penelitian terhadap model logistik diskrit standar, sebab grafik deret waktu dan diagram bifurkasi dapat memperlihatkan perubahan orbit secara visual, tetapi belum sepenuhnya menjelaskan apakah ketidakteraturan yang muncul benar-benar disertai sensitivitas terhadap kondisi awal.

Berdasarkan kajian penelitian terdahulu, sebagian besar studi mutakhir berfokus pada perluasan dimensi, penggabungan peta, penambahan mekanisme kendali, peningkatan karakteristik *chaos*, atau pengembangan aplikasi berbasis model logistik. Di sisi lain, masih terbatas penyajian yang secara eksplisit mengintegrasikan kestabilan lokal, simulasi deret waktu, diagram bifurkasi, eksponen Lyapunov, dan pengujian sensitivitas kondisi awal dalam satu prosedur komputasional replikatif untuk model logistik diskrit standar sebagai model acuan. Permasalahan penelitian ini



terletak pada kebutuhan untuk menjelaskan dinamika model logistik secara terpadu agar klasifikasi perilaku stabil, periodik, maupun *chaos* tidak hanya bergantung pada interpretasi visual, tetapi juga didukung oleh indikator numerik yang konsisten. Dengan pendekatan tersebut, hubungan antara hasil analitik dan hasil simulasi dapat ditunjukkan secara lebih jelas, sekaligus memberikan dasar metodologis sebelum prosedur serupa diterapkan pada model yang telah dimodifikasi atau pada aplikasi komputasional tertentu.

Permasalahan tersebut menjadi penting karena diagram bifurkasi dan grafik deret waktu, meskipun informatif, pada dasarnya memberikan bukti visual terhadap perubahan dinamika. Orbit yang tampak menyebar atau tidak beraturan belum cukup untuk dinyatakan sebagai dinamika *chaos* apabila tidak didukung oleh ukuran numerik yang relevan. Dalam kajian model logistik termodifikasi, Suryanto et al. (2025) menggunakan eksponen Lyapunov maksimum untuk memperkuat interpretasi bifurkasi dan dinamika kompleks. Pada model logistik standar, Galias (2025) secara khusus menunjukkan pentingnya kajian numerik terhadap kepadatan dan lokasi *periodic windows*, sehingga wilayah parameter kompleks tidak dapat ditafsirkan secara sederhana sebagai wilayah *chaos* sepenuhnya. Oleh sebab itu, penelitian ini mengintegrasikan analisis kestabilan lokal, simulasi deret waktu, diagram bifurkasi, eksponen Lyapunov, pengujian sensitivitas kondisi awal, serta pengamatan *periodic windows* agar interpretasi perilaku model dapat dilakukan secara lebih teliti dan dapat diverifikasi.

Urgensi penelitian ini tidak didasarkan pada klaim bahwa karakteristik dasar model logistik merupakan temuan baru, karena proses bifurkasi dan transisi menuju *chaos* pada model tersebut telah dikenal dalam teori sistem dinamik. Namun, model logistik tetap penting sebagai model acuan karena struktur sederhananya memungkinkan setiap tahapan analisis komputasional dijelaskan secara transparan dan dapat diulang. Dalam kajian komputasi terapan, kejelasan prosedur, ketepatan parameter simulasi, kesesuaian antara indikator analitik dan numerik, serta kemampuan mereproduksi hasil merupakan unsur penting dalam menilai kualitas suatu analisis. Penggunaan model standar juga memungkinkan perbandingan yang lebih jelas dengan pengembangan model pada penelitian lain, baik yang memperluas dimensi, menambahkan kendali, meningkatkan karakteristik *chaos*, maupun menerapkannya pada pembangkitan bilangan semu-acak dan keamanan informasi. Oleh karena itu, penyusunan kerangka evaluasi komputasional yang menyatukan berbagai indikator dinamika pada model standar tetap memiliki relevansi metodologis.

Solusi yang ditawarkan dalam penelitian ini adalah penggunaan kerangka analisis komputasional terpadu untuk mengevaluasi dinamika model logistik diskrit nonlinier. Analisis diawali dengan penentuan titik tetap dan kestabilan lokal sebagai dasar teoretis perubahan perilaku orbit. Selanjutnya, simulasi deret waktu digunakan untuk mengamati perkembangan orbit pada beberapa kondisi parameter yang representatif, sedangkan diagram bifurkasi digunakan untuk memperlihatkan perubahan struktur dinamika secara global. Untuk memperkuat identifikasi dinamika *chaos*, penelitian ini menambahkan perhitungan eksponen Lyapunov dan pengujian sensitivitas terhadap kondisi awal. Selain itu, pengamatan terhadap *periodic windows* dilakukan agar wilayah parameter dengan dinamika kompleks tidak diklasifikasikan secara berlebihan sebagai *chaos* secara keseluruhan. Integrasi metode tersebut membedakan penelitian ini dari kajian yang hanya menyajikan pola orbit atau diagram bifurkasi sebagai keluaran visual.

State of the art penelitian ini terletak pada penggunaan model logistik diskrit standar sebagai model acuan analisis komputasional yang mengintegrasikan kestabilan lokal, simulasi deret waktu, diagram bifurkasi, eksponen Lyapunov, sensitivitas terhadap kondisi awal, dan pengamatan *periodic windows* dalam satu prosedur evaluasi yang sistematis. Posisi penelitian ini berbeda dari Bucolo et al. (2022) yang memperluas model ke bentuk multidimensi, Al-Kaff et al. (2024) yang membangun sistem logistik terhubung, Xu et al. (2023) yang memodifikasi model dalam bentuk fraksional dan kuantum, Suryanto et al. (2025) yang memasukkan mekanisme pemanenan serta kendali, Hua et al. (2019) yang meningkatkan karakteristik *chaos* melalui transformasi sinus, Zhao dan Ma (2024) serta (Alawida, 2024) yang mengembangkan peta untuk pembangkitan bilangan semu-acak, dan Nazish et al. (2025) yang meningkatkan peta logistik untuk pembangkitan bit. Penelitian ini tidak mengusulkan model baru maupun aplikasi khusus, melainkan menekankan konsistensi evaluasi dinamika melalui keterhubungan antara dasar analitik, visualisasi numerik, dan indikator kuantitatif.

Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis dinamika model logistik diskrit nonlinier melalui perpaduan analisis matematis dan simulasi komputasi, dengan fokus pada perubahan perilaku sistem akibat variasi parameter kendali. Secara khusus, analisis diarahkan untuk menjelaskan hubungan antara kestabilan orbit, bifurkasi, transisi menuju dinamika *chaos*, eksponen Lyapunov, sensitivitas kondisi awal, dan keberadaan *periodic windows*. Kontribusi penelitian ini adalah menghasilkan kerangka analisis komputasional yang terstruktur dan dapat direplikasi untuk menghubungkan bukti analitik, bukti visual, serta indikator numerik dalam evaluasi dinamika model diskrit nonlinier. Kerangka tersebut diharapkan dapat menjadi dasar metodologis bagi penelitian lanjutan yang menganalisis model diskrit lain dengan dinamika lebih kompleks maupun pengembangan aplikasi komputasional yang memerlukan evaluasi sifat dinamik secara lebih menyeluruh.

2. METODOLOGI PENELITIAN

2.1 Kerangka Dasar Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian kuantitatif berbasis pemodelan matematis dan simulasi komputasi. Objek penelitian berupa model logistik diskrit nonlinier yang dianalisis untuk memahami perubahan perilaku orbit akibat variasi parameter kendali. Penelitian ini tidak melibatkan responden, populasi, sampel, maupun lokasi penelitian lapangan

karena data yang digunakan bukan berasal dari pengukuran empiris, melainkan dari hasil iterasi model matematis. Dengan demikian, jumlah responden dan lokasi penelitian dinyatakan tidak berlaku dalam penelitian ini.

Variabel utama dalam penelitian ini terdiri atas variabel keadaan dan parameter kendali. Variabel keadaan dinyatakan sebagai x_t , yaitu nilai sistem pada iterasi ke- t , sedangkan parameter kendali dinyatakan sebagai r , yaitu parameter yang mengatur perubahan dinamika model. Selain itu, penelitian ini juga menggunakan beberapa indikator hasil, yaitu pola deret waktu, struktur diagram bifurkasi, nilai eksponen Lyapunov, dan sensitivitas terhadap kondisi awal. Bacciotti (2022) menjelaskan bahwa pada sistem diskrit, perilaku jangka panjang orbit dapat dipahami melalui hubungan antara fungsi iterasi dan kestabilan titik tetap. Oleh karena itu, analisis titik tetap dan kestabilan lokal digunakan sebagai dasar awal sebelum model dianalisis secara komputasional.

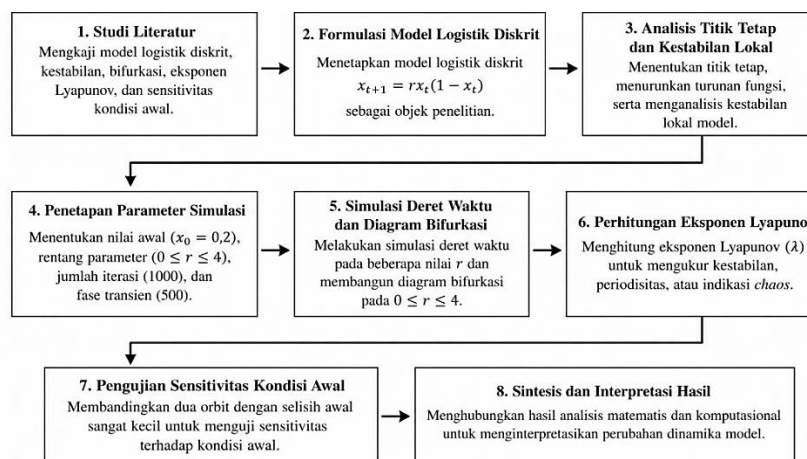
Hipotesis penelitian ini bersifat analitik-komputasional, yaitu bahwa perubahan nilai parameter kendali r menyebabkan perubahan kualitatif pada dinamika model logistik diskrit. Pada rentang parameter tertentu, orbit diperkirakan menuju titik tetap stabil; setelah melewati nilai kritis, orbit mengalami bifurkasi dan membentuk pola periodik; sedangkan pada rentang parameter lebih tinggi, model menunjukkan dinamika *chaos* yang ditandai oleh nilai eksponen Lyapunov positif dan sensitivitas terhadap kondisi awal. Dalam teori bifurkasi, Kuznetsov (2023) menjelaskan bahwa variasi parameter dapat mengubah kestabilan dan struktur orbit suatu sistem. Dengan dasar tersebut, penelitian ini menggunakan kerangka pemikiran yang menghubungkan variasi parameter, kestabilan lokal, simulasi deret waktu, diagram bifurkasi, eksponen Lyapunov, dan sensitivitas kondisi awal sebagai satu alur analisis terpadu.

2.2 Tahapan Penelitian

Tahapan penelitian disusun untuk menggambarkan urutan pelaksanaan penelitian mulai dari kajian teori sampai interpretasi hasil. Penelitian diawali dengan studi literatur mengenai sistem dinamik diskrit, model logistik, titik tetap, kestabilan lokal, bifurkasi, eksponen Lyapunov, dan sensitivitas terhadap kondisi awal. Tahap ini diperlukan agar analisis yang dilakukan memiliki dasar teoretis yang sesuai dengan karakteristik model. Setelah itu, penelitian dilanjutkan dengan formulasi model logistik diskrit sebagai objek utama penelitian.

Tahap berikutnya adalah analisis matematis awal, yaitu menentukan titik tetap dan kriteria kestabilan lokal. Hasil analisis ini digunakan untuk memperkirakan rentang parameter yang menghasilkan dinamika stabil dan nilai kritis yang menandai awal bifurkasi. Selanjutnya, dilakukan penetapan parameter simulasi, meliputi nilai awal, rentang parameter, jumlah iterasi, jumlah iterasi transien, dan jumlah titik akhir yang divisualisasikan. Zaytsev et al. (2024) menyatakan bahwa pemodelan komputasional dapat digunakan untuk mengeksplorasi perilaku sistem dinamik melalui prosedur iteratif dan visualisasi numerik. Atas dasar tersebut, penelitian ini menerapkan simulasi deret waktu dan diagram bifurkasi untuk mengamati perubahan dinamika model.

Pengujian metode dilakukan melalui perhitungan eksponen Lyapunov dan pengujian sensitivitas terhadap kondisi awal. Eksponen Lyapunov digunakan untuk memperkuat identifikasi dinamika *chaos*, sedangkan sensitivitas kondisi awal digunakan untuk membandingkan dua orbit yang dimulai dari nilai awal sangat berdekatan. Alur penelitian secara keseluruhan terdiri atas studi literatur, formulasi model, analisis titik tetap dan kestabilan lokal, penetapan parameter simulasi, simulasi deret waktu dan diagram bifurkasi, perhitungan eksponen Lyapunov, pengujian sensitivitas kondisi awal, serta sintesis dan interpretasi hasil. Alur tersebut ditampilkan pada Gambar 1 agar tahapan penelitian dapat dipahami secara sistematis.



Gambar 1. Alur penelitian analisis dinamika model logistik diskrit

2.3 Implementasi Simulasi dan Visualisasi

Model yang digunakan dalam penelitian ini adalah model logistik diskrit nonlinier yang dinyatakan sebagai berikut:

$$x_{t+1} = rx_t(1 - x_t) \tag{1}$$



Dengan x_t menyatakan variabel keadaan pada iterasi ke- t , x_{t+1} menyatakan nilai keadaan pada iterasi berikutnya, dan r menyatakan parameter kendali. Rentang nilai keadaan dibatasi pada $0 \leq x_t \leq 1$, sedangkan parameter kendali diamati pada rentang $0 \leq r \leq 4$. Bucolo et al. (2022) menggunakan model logistik sebagai salah satu acuan dalam kajian peta diskrit karena model tersebut mampu memperlihatkan karakteristik dinamika kompleks secara jelas. Dalam penelitian ini, model logistik tidak dimodifikasi, melainkan digunakan sebagai model standar untuk mengevaluasi hubungan antara kestabilan, bifurkasi, eksponen Lyapunov, dan sensitivitas kondisi awal.

Simulasi dilakukan dengan nilai awal $x_0 = 0.2$. Parameter r divariasikan dari 0 sampai 4 dengan langkah $\Delta r = 0.001$. Untuk setiap nilai parameter, model dijalankan sebanyak 1000 iterasi, dengan 500 iterasi awal diabaikan sebagai fase transien. Pada diagram bifurkasi, 100 nilai akhir dari setiap parameter divisualisasikan untuk menunjukkan perilaku jangka panjang model. Rincian parameter simulasi ditunjukkan pada Tabel 1.

Tabel 1. Parameter simulasi model logistik diskrit

Parameter	Nilai	Keterangan
Nilai awal	$x_0 = 0.2$	Kondisi awal utama
Rentang parameter	$0 \leq r \leq 4$	Parameter kendali
Langkah parameter	$\Delta r = 0.001$	Resolusi perubahan parameter
Iterasi total	1000	Jumlah iterasi tiap parameter
Iterasi transien	500	Iterasi awal yang diabaikan
Titik akhir bifurkasi	100	Nilai akhir yang diplot
Perangkat lunak	Python	Implementasi simulasi
Pustaka	NumPy dan Matplotlib	Perhitungan dan visualisasi

Simulasi deret waktu dilakukan pada beberapa nilai parameter representatif, yaitu $r = 0.8$, $r = 2.5$, $r = 2.9$, $r = 3.2$, $r = 3.5$, $r = 3.55$, $r = 3.8$, dan $r = 3.83$. Nilai-nilai tersebut dipilih untuk mewakili konvergensi menuju titik tetap, orbit periodik, dinamika kompleks, dan periodic window. Diagram bifurkasi digunakan untuk menggambarkan perubahan struktur orbit secara global pada seluruh rentang parameter. Galias (2025) menunjukkan bahwa *periodic windows* merupakan bagian penting dari struktur parameter model logistik, sehingga penelitian ini juga memperhatikan kemunculan kembali orbit periodik pada wilayah parameter yang kompleks.

Eksponen Lyapunov dihitung untuk menilai kecenderungan orbit mengalami kontraksi atau divergensi. Untuk model logistik diskrit, eksponen Lyapunov dihitung dengan:

$$\lambda(r) = \frac{1}{M} \sum_{t=N_{transien}+1}^{N_{transien}+M} \ln|r(1 - 2x_t)| \quad (2)$$

Dengan $\lambda(r)$ menyatakan eksponen Lyapunov, $N_{transien}$ menyatakan jumlah iterasi awal yang diabaikan, dan M menyatakan jumlah iterasi yang digunakan dalam perhitungan setelah fase transien. Dalam penelitian ini, $N_{transien} = 500$ dan $M = 500$. Selain itu, pengujian sensitivitas kondisi awal dilakukan dengan membandingkan dua orbit dari $x_0 = 0.200000$ dan $x'_0 = 0.200001$, sehingga selisih awal kedua orbit adalah 10^{-6} . Nazish et al. (2025) menggunakan indikator Lyapunov dan pengujian sensitivitas sebagai bagian dari evaluasi dinamika peta logistik yang ditingkatkan. Pada penelitian ini, prinsip serupa diterapkan pada model logistik standar untuk memperkuat interpretasi dinamika chaos.

2.4 Teknik Analisis

Teknik analisis data dalam penelitian ini terdiri atas analisis matematis dan analisis komputasional. Analisis matematis digunakan untuk menentukan titik tetap dan kestabilan lokal model. Titik tetap diperoleh dengan menyamakan $x_{t+1} = x_t$, sedangkan kestabilan lokal dianalisis melalui nilai turunan fungsi iterasi pada titik tetap. Titik tetap dikategorikan stabil apabila nilai absolut turunannya kurang dari satu. Hasil analisis ini digunakan sebagai dasar untuk menafsirkan pola deret waktu dan diagram bifurkasi.

Analisis komputasional dilakukan melalui empat keluaran utama, yaitu grafik deret waktu, diagram bifurkasi, grafik eksponen Lyapunov, dan grafik sensitivitas kondisi awal. Grafik deret waktu digunakan untuk melihat perkembangan orbit pada parameter tertentu, khususnya untuk membedakan orbit yang menuju titik tetap, orbit periodik, dan orbit yang tidak menunjukkan pola pengulangan sederhana. Dalam kajian peta *chaotic* digital, Fan dan Ding (2019) menekankan pentingnya pemeriksaan periodisitas orbit secara numerik agar dinamika peta tidak hanya ditafsirkan melalui tampilan visual sesaat. Sejalan dengan hal tersebut, penelitian ini menggunakan grafik deret waktu untuk mengamati pola orbit periode-2, periode-4, periode-8, serta orbit kompleks yang perlu diverifikasi dengan indikator lain. Diagram bifurkasi digunakan untuk mengamati perubahan struktur orbit pada seluruh rentang parameter. Eksponen Lyapunov digunakan untuk membedakan orbit stabil, orbit periodik, dan dinamika *chaos*. Zhao dan Ma (2024) menggunakan diagram bifurkasi dan eksponen Lyapunov untuk mengevaluasi perilaku dinamik peta logistik yang dimodifikasi. Dengan cara yang lebih mendasar, penelitian ini menggunakan dua indikator tersebut untuk membaca dinamika model logistik standar secara sistematis.

Kriteria interpretasi hasil ditetapkan sebagai berikut. Jika orbit berkonvergensi menuju satu nilai dan eksponen Lyapunov bernilai negatif, dinamika dikategorikan sebagai titik tetap stabil. Jika orbit berulang pada sejumlah nilai terbatas dan eksponen Lyapunov negatif, dinamika dikategorikan sebagai orbit periodik stabil. Jika diagram bifurkasi



menunjukkan percabangan bertingkat, dinamika dikategorikan sebagai proses *period-doubling* cascade. Jika orbit tampak tidak periodik, diagram bifurkasi menunjukkan sebaran titik kompleks, eksponen Lyapunov positif, dan dua orbit dari kondisi awal berdekatan mengalami divergensi, maka dinamika dikategorikan sebagai *chaos*. Sementara itu, jika pada wilayah parameter tinggi orbit kembali periodik dan eksponen Lyapunov negatif, maka dinamika dikategorikan sebagai *periodic window*.

Dengan teknik analisis tersebut, hasil penelitian tidak ditentukan hanya berdasarkan satu grafik. Setiap klasifikasi dinamika dibaca melalui keterkaitan antara hasil analitik, visualisasi numerik, dan indikator sensitivitas. Pendekatan ini memungkinkan perubahan dinamika model logistik diskrit dijelaskan secara lebih sistematis, mulai dari kestabilan titik tetap, bifurkasi, orbit periodik, dinamika *chaos*, hingga kemunculan *periodic windows*.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Bagian ini menyajikan hasil dan pembahasan mengenai dinamika model logistik diskrit nonlinier berdasarkan tahapan analisis yang telah dijelaskan pada metode penelitian. Pembahasan diawali dengan hasil analisis titik tetap dan kestabilan lokal untuk memperoleh dasar teoretis mengenai perilaku model pada rentang parameter tertentu. Selanjutnya, hasil tersebut dibandingkan dengan simulasi deret waktu dan diagram bifurkasi untuk melihat perubahan orbit secara visual dan global. Analisis kemudian diperkuat melalui perhitungan eksponen Lyapunov serta pengujian sensitivitas terhadap kondisi awal agar identifikasi dinamika stabil, periodik, dan *chaos* tidak hanya bergantung pada tampilan grafik. Dengan demikian, pembahasan pada bab ini diarahkan untuk menunjukkan keterkaitan antara hasil analitik dan hasil komputasional dalam menjelaskan transisi dinamika model, mulai dari titik tetap stabil, bifurkasi, *period-doubling* cascade, dinamika *chaos*, hingga kemunculan *periodic windows*.

3.1 Hasil Analisis Titik Tetap dan Kestabilan Lokal

Analisis titik tetap dilakukan untuk mengetahui keadaan jangka panjang model logistik diskrit sebelum hasil simulasi komputasi diinterpretasikan. Model yang digunakan dalam penelitian ini didefinisikan oleh persamaan (1), dengan x_t menyatakan variabel keadaan pada iterasi ke- t , dan r menyatakan parameter kendali. Titik tetap diperoleh ketika $x_{t+1} = x_t = x^*$, sehingga:

$$x^* = rx^*(1 - x^*) \quad (3)$$

Persamaan tersebut menghasilkan dua titik tetap, yaitu:

$$x_1^* = 0$$

Dan

$$x_2^* = 1 - \frac{1}{r}, \quad r \neq 0 \quad (4)$$

Titik tetap pertama, yaitu $x_1^* = 0$, terdapat untuk seluruh nilai parameter. Sementara itu, titik tetap kedua relevan pada domain pengamatan ketika $r \geq 1$, karena pada rentang tersebut nilai x_2^* berada dalam interval keadaan $0 \leq x_t \leq 1$. Analisis kestabilan lokal dilakukan dengan menggunakan turunan fungsi iterasi:

$$f'(x) = r(1 - 2x) \quad (5)$$

Dalam sistem diskrit satu dimensi, suatu titik tetap dikatakan stabil secara lokal apabila $|f'(x^*)| < 1$. Bacciotti (2022) menjelaskan bahwa kriteria ini penting untuk menentukan apakah orbit di sekitar titik tetap akan mendekat atau menjauh setelah mengalami gangguan kecil. Untuk titik tetap $x_1^* = 0$, diperoleh:

$$f'(0) = r \quad (6)$$

Dengan demikian, titik tetap nol stabil untuk:

$$0 < r < 1 \quad (7)$$

Pada $r = 0$, orbit langsung menuju nol setelah satu iterasi, sehingga kondisi ini dapat dipandang sebagai keadaan trivial. Ketika $r > 1$, titik tetap nol tidak lagi stabil, dan orbit cenderung menuju titik tetap nonnol apabila titik tersebut stabil. Untuk titik tetap kedua $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$, diperoleh:

$$f'(x_2^*) = 2 - r \quad (8)$$

Kriteria kestabilan $|2 - r| < 1$ menghasilkan rentang:

$$1 < r < 3 \quad (9)$$

Artinya, titik tetap nonnol stabil pada rentang $1 < r < 3$. Pada $r = 3$, nilai turunan pada titik tetap nonnol adalah -1 , sehingga titik tetap tersebut berada pada batas kehilangan kestabilan. Dalam teori bifurkasi, Kuznetsov (2023) menjelaskan bahwa kondisi ketika pengali titik tetap melewati nilai -1 berkaitan dengan munculnya bifurkasi pelipatan periode atau *period-doubling* bifurcation. Oleh karena itu, $r = 3$ menjadi parameter kritis pertama yang menandai perubahan dari titik tetap stabil menuju orbit periodik.

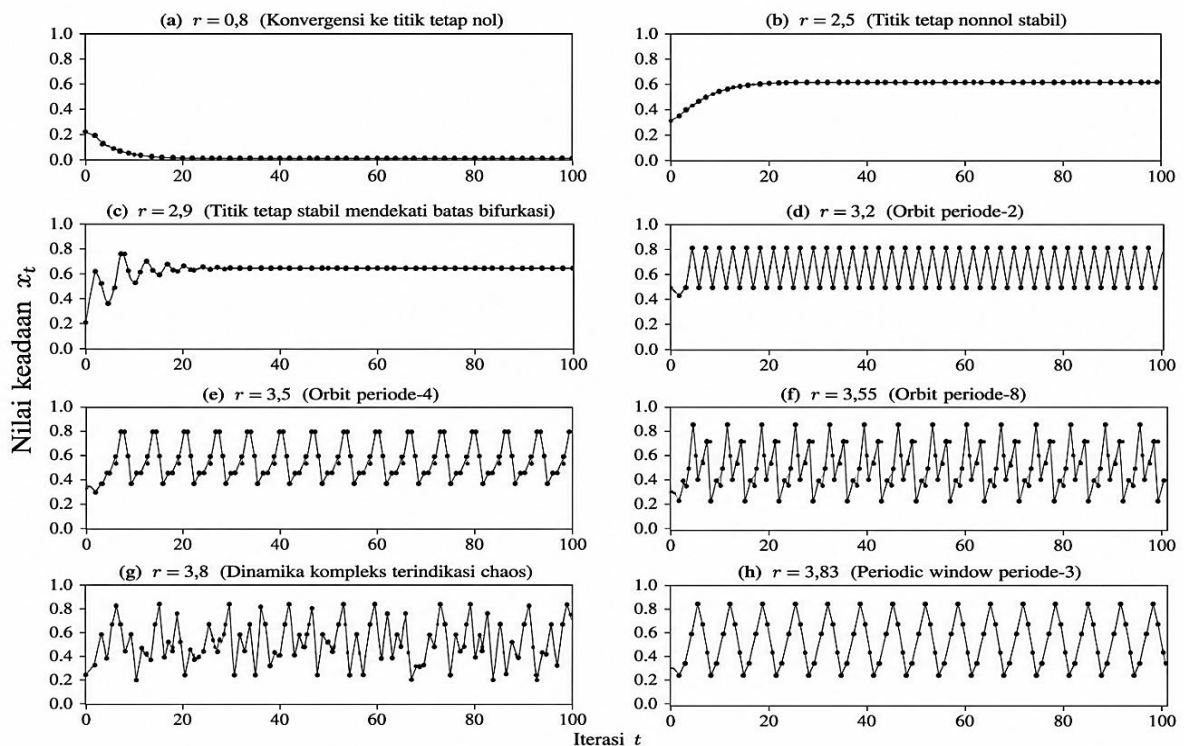
Tabel 2. Hasil analisis titik tetap dan kestabilan lokal model logistik diskrit

Nilai Parameter	Titik Tetap Relevan	Hasil Analisis
$r = 0$	$x_1^* = 0$	Orbit langsung menuju nol
$0 < r < 1$	$x_1^* = 0$	Titik tetap nol stabil
$r = 1$	$x_1^* = x_2^* = 0$	Batas perubahan menuju titik tetap nonnol
$1 < r < 3$	$x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$	Titik tetap nonnol stabil
$r = 3$	$x_2^* = \frac{2}{3}$	Batas bifurkasi pertama
$r > 3$	$x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$	Titik tetap nonnol tidak stabil

Berdasarkan Tabel 2, hasil analitik menunjukkan bahwa perubahan nilai parameter r memengaruhi kestabilan titik tetap model. Pada parameter rendah, orbit menuju titik tetap nol. Setelah $r > 1$, titik tetap nonnol menjadi stabil hingga parameter mencapai $r = 3$. Setelah melewati nilai tersebut, titik tetap nonnol kehilangan kestabilannya dan orbit periodik mulai terbentuk. Hasil ini menjadi dasar untuk membaca pola deret waktu dan diagram bifurkasi pada subbab berikutnya.

3.2 Hasil Simulasi Deret Waktu Model Logistik Diskrit

Simulasi deret waktu dilakukan untuk mengamati perilaku orbit model logistik diskrit pada beberapa nilai parameter representatif. Parameter yang digunakan meliputi $r = 0.8, r = 2.5, r = 2.9, r = 3.2, r = 3.5, r = 3.55, r = 3.8$, dan $r = 3.83$. Nilai-nilai tersebut dipilih karena mewakili beberapa kondisi dinamika utama, yaitu titik tetap nol, titik tetap nonnol, orbit periodik, dinamika kompleks, dan periodic window. Simulasi dilakukan dengan nilai awal $x_0 = 0.2$ dan jumlah iterasi sebanyak 1000.



Gambar 2. Pola deret waktu model logistik diskrit pada beberapa nilai parameter

Hasil simulasi deret waktu ditampilkan pada Gambar 2. Pada $r = 0.8$, orbit bergerak menuju nol. Hal ini sesuai dengan hasil analisis kestabilan lokal yang menunjukkan bahwa titik tetap nol stabil pada rentang $0 < r < 1$. Pada $r = 2.5$, orbit berkonvergensi menuju titik tetap nonnol sebesar 0.6000. Sementara itu, pada $r = 2.9$, orbit juga menuju titik tetap nonnol, yaitu sekitar 0.6552, tetapi proses menuju kestabilan tampak lebih beresilasi karena parameter tersebut berada lebih dekat dengan batas bifurkasi pertama.

Setelah parameter melewati $r = 3$, orbit tidak lagi menuju satu titik tetap. Pada $r = 3.2$, orbit bergantian pada dua nilai, sehingga menunjukkan orbit periode-2. Pada $r = 3.5$, orbit membentuk pola periode-4, sedangkan pada $r = 3.55$, orbit menunjukkan periode yang lebih tinggi, yaitu periode-8. Pola tersebut menunjukkan terjadinya peningkatan periode orbit secara bertahap melalui mekanisme *period-doubling cascade*.

Pada $r = 3.8$, orbit tidak membentuk pola pengulangan sederhana. Nilai x_t berubah secara tidak teratur dalam rentang tertentu, sehingga perilaku tersebut terindikasi sebagai dinamika *chaos*. Namun, klasifikasi *chaos* tidak ditentukan hanya berdasarkan grafik deret waktu, karena pola visual yang tidak teratur masih perlu diperkuat dengan diagram bifurkasi, eksponen Lyapunov, dan pengujian sensitivitas kondisi awal. Pada $r = 3.83$, orbit kembali membentuk pola periode-3. Fenomena ini menunjukkan adanya *periodic window*, yaitu kondisi ketika orbit periodik muncul kembali di dalam wilayah parameter yang secara umum didominasi dinamika kompleks.

Tabel 3. Ringkasan hasil simulasi deret waktu model logistik diskrit

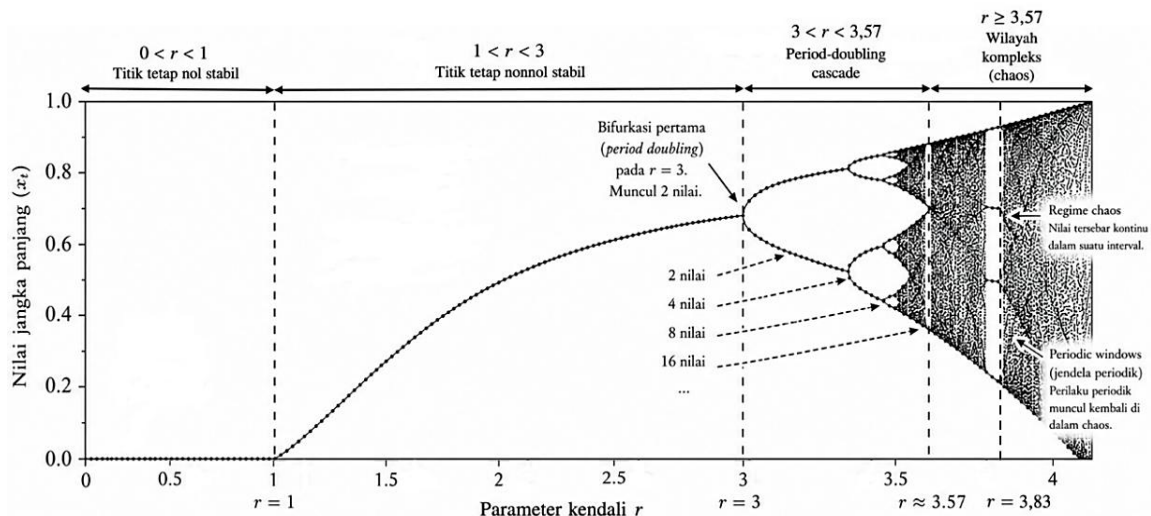
Nilai r	Pola Orbit Jangka Panjang	Interpretasi Dinamika
0.8	Menuju nol	Titik tetap nol stabil
2.5	Menuju sekitar 0.6000	Titik tetap nonnol stabil
2.9	Menuju sekitar 0.6552	Titik tetap stabil mendekati bifurkasi
3.2	Berulang pada dua nilai	Orbit periode-2
3.5	Berulang pada empat nilai	Orbit periode-4
3.55	Berulang pada delapan nilai	Orbit periode-8
3.8	Tidak menunjukkan periode sederhana	Terindikasi <i>chaos</i>
3.83	Berulang pada tiga nilai	Periodic window periode-3

Berdasarkan Tabel 3, peningkatan parameter r menyebabkan perubahan dinamika yang bertahap. Model bergerak dari kondisi stabil menuju orbit periodik, kemudian memasuki dinamika kompleks, dan pada interval tertentu kembali menunjukkan orbit periodik. Hasil ini memperkuat temuan analitik pada Subbab 3.1 bahwa kehilangan kestabilan pada $r = 3$ menjadi awal perubahan struktur orbit. Untuk memperoleh gambaran dinamika yang lebih menyeluruh pada seluruh rentang parameter, analisis dilanjutkan melalui diagram bifurkasi.

3.3 Diagram Bifurkasi dan Transisi Dinamika

Diagram bifurkasi digunakan untuk mengamati perubahan struktur orbit model logistik diskrit pada seluruh rentang parameter $0 \leq r \leq 4$. Berbeda dengan simulasi deret waktu yang hanya menampilkan perilaku orbit pada nilai parameter tertentu, diagram bifurkasi memberikan gambaran global mengenai perubahan dinamika akibat variasi parameter. Diagram ini dibuat dengan menjalankan model pada setiap nilai r , mengabaikan fase transien, dan memplot sejumlah nilai akhir orbit sebagai representasi perilaku jangka panjang.

Hasil diagram bifurkasi ditampilkan pada Gambar 3. Pada rentang $0 < r < 1$, orbit menuju titik tetap nol, sehingga titik-titik pada diagram berada pada garis $x_t = 0$. Pada rentang $1 < r < 3$, diagram menunjukkan satu cabang nonnol yang meningkat seiring bertambahnya parameter. Cabang ini menunjukkan bahwa orbit menuju satu titik tetap stabil, sesuai dengan hasil analisis kestabilan lokal.



Gambar 3. Diagram bifurkasi model logistik diskrit pada rentang parameter $0 \leq r \leq 4$

Perubahan struktur pertama terjadi pada $r = 3$, ketika satu cabang stabil mulai terpecah menjadi dua cabang. Peristiwa ini menunjukkan bifurkasi pertama dan munculnya orbit periode-2. Hasil ini konsisten dengan simulasi deret waktu pada $r = 3.2$, yang memperlihatkan dua nilai orbit yang muncul secara bergantian. Setelah itu, peningkatan parameter menyebabkan percabangan berulang dari dua cabang menjadi empat, delapan, dan seterusnya. Proses ini dikenal sebagai *period-doubling cascade*.

Ketika parameter mendekati sekitar $r \approx 3.57$, percabangan menjadi semakin rapat dan orbit mulai tersebar dalam interval yang lebih luas. Wilayah ini menunjukkan awal dinamika kompleks yang terindikasi *chaos*. Namun, diagram bifurkasi juga menunjukkan bahwa wilayah parameter tinggi tidak seluruhnya berisi orbit tidak teratur. Di

sekitar $r = 3.83$, muncul kembali tiga cabang orbit yang teratur, yang menunjukkan adanya periodic window periode-3. Galias (2025) menunjukkan bahwa *periodic windows* merupakan bagian penting dari struktur parameter model logistik, sehingga keberadaannya perlu diperhatikan agar wilayah kompleks tidak diklasifikasikan secara berlebihan sebagai *chaos* sepenuhnya.

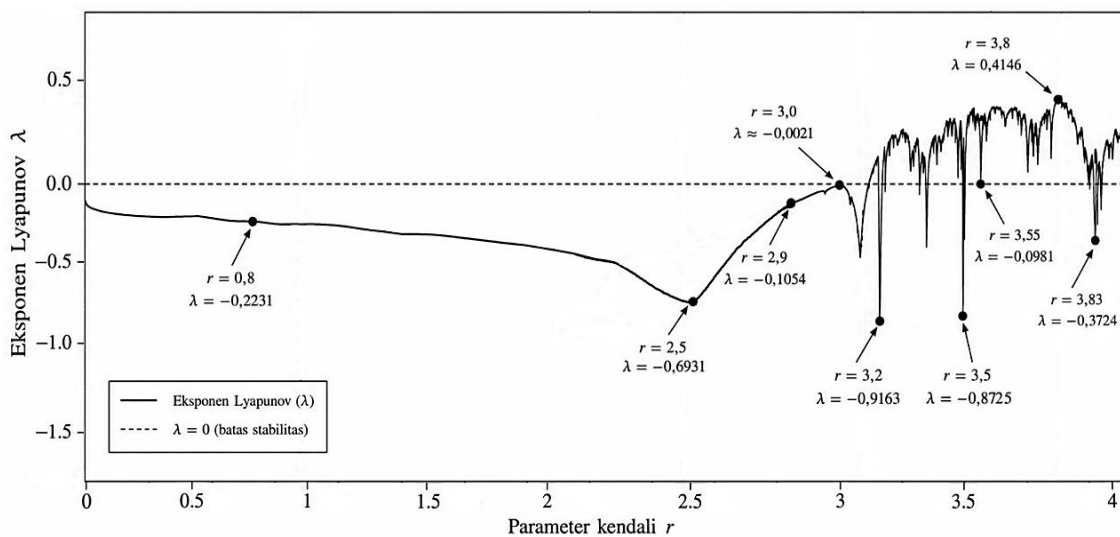
Tabel 4. Interpretasi struktur diagram bifurkasi model logistik diskrit

Nilai Parameter	Struktur pada Diagram Bifurkasi	Interpretasi Dinamika
$0 < r < 1$	Satu cabang pada $x_t = 0$	Titik tetap nol stabil
$1 < r < 3$	Satu cabang nonnol	Titik tetap nonnol stabil
$r = 3$	Satu cabang mulai membelah dua	Bifurkasi pertama
$3 < r < 3.57$	Percabangan dua, empat, delapan, dan seterusnya	<i>Period-doubling</i> cascade
$r \geq 3.57$	Titik tersebar dalam interval	Wilayah dinamika kompleks
Sekitar $r = 3.83$	Tiga cabang periodik muncul kembali	Periodic window periode-3

Berdasarkan Gambar 3 dan Tabel 4, diagram bifurkasi memperjelas transisi dinamika model logistik diskrit secara global. Hasil analitik pada Subbab 3.1 menjelaskan titik kritis awal, sedangkan simulasi deret waktu pada Subbab 3.2 menunjukkan contoh perilaku orbit pada parameter tertentu. Diagram bifurkasi melengkapi keduanya dengan memperlihatkan perubahan struktur orbit pada seluruh rentang parameter. Meskipun demikian, identifikasi dinamika *chaos* masih perlu diperkuat dengan indikator numerik. Oleh karena itu, eksponen Lyapunov dibahas pada Subbab 3.4 sebagai ukuran kuantitatif untuk menilai sensitivitas orbit terhadap kondisi awal.

3.4 Eksponen Lyapunov sebagai Indikator Numerik Dinamika *Chaos*

Eksponen Lyapunov digunakan untuk memperkuat identifikasi dinamika *chaos* yang sebelumnya telah terlihat melalui simulasi deret waktu dan diagram bifurkasi. Pada model diskrit, eksponen Lyapunov menunjukkan kecenderungan dua orbit yang berdekatan untuk saling mendekat atau menjauh. Nilai eksponen Lyapunov negatif menunjukkan bahwa orbit cenderung stabil atau periodik, nilai yang mendekati nol menunjukkan wilayah transisi atau bifurkasi, sedangkan nilai positif menunjukkan adanya sensitivitas terhadap kondisi awal yang menjadi karakteristik penting dinamika *chaos*. Perhitungan eksponen Lyapunov dilakukan pada rentang parameter $0 \leq r \leq 4$, dengan nilai awal $x_0 = 0.2$, jumlah iterasi 1000, dan 500 iterasi awal diabaikan sebagai fase transien. Hasil perhitungan disajikan pada Gambar 4.



Gambar 4. Eksponen Lyapunov model logistik diskrit terhadap variasi parameter kendali

Berdasarkan Gambar 4, nilai eksponen Lyapunov pada wilayah titik tetap stabil berada di bawah nol. Pada $r = 0.8$, diperoleh $\lambda = -0.2231$, yang menunjukkan bahwa orbit menuju titik tetap nol. Pada $r = 2.5$, nilai eksponen Lyapunov sebesar -0.6931 , sedangkan pada $r = 2.9$ nilainya meningkat menjadi -0.1054 . Nilai pada $r = 2.9$ masih negatif, tetapi sudah mendekati nol, sehingga menunjukkan bahwa parameter tersebut berada dekat dengan batas bifurkasi pertama.

Pada $r = 3$, nilai eksponen Lyapunov sekitar -0.0021 , yaitu sangat dekat dengan nol. Hasil ini sesuai dengan analisis kestabilan lokal yang menunjukkan bahwa $r = 3$ merupakan batas hilangnya kestabilan titik tetap nonnol. Setelah melewati nilai tersebut, orbit tidak langsung menjadi *chaos*, tetapi terlebih dahulu membentuk orbit periodik yang masih stabil. Hal ini terlihat pada $r = 3.2$, $r = 3.5$, dan $r = 3.55$, yang masing-masing memiliki nilai eksponen Lyapunov negatif sebesar -0.9163 , -0.8725 , dan -0.0981 . Nilai negatif tersebut mendukung hasil deret waktu bahwa orbit periode-2, periode-4, dan periode-8 masih termasuk orbit periodik stabil.

Perubahan menuju dinamika kompleks mulai terlihat ketika nilai eksponen Lyapunov menjadi positif. Pada $r = 3.8$, diperoleh $\lambda = 0.4146$. Nilai positif ini menunjukkan bahwa orbit sensitif terhadap perubahan kecil pada kondisi awal, sehingga mendukung klasifikasi dinamika *chaos*. Sebaliknya, pada $r = 3.83$, nilai eksponen Lyapunov kembali negatif, yaitu -0.3724 . Hasil ini menunjukkan bahwa meskipun parameter tersebut berada pada wilayah parameter tinggi, orbit yang terbentuk kembali bersifat periodik. Dengan demikian, nilai eksponen Lyapunov pada $r = 3.83$ memperkuat interpretasi adanya *periodic window* periode-3.

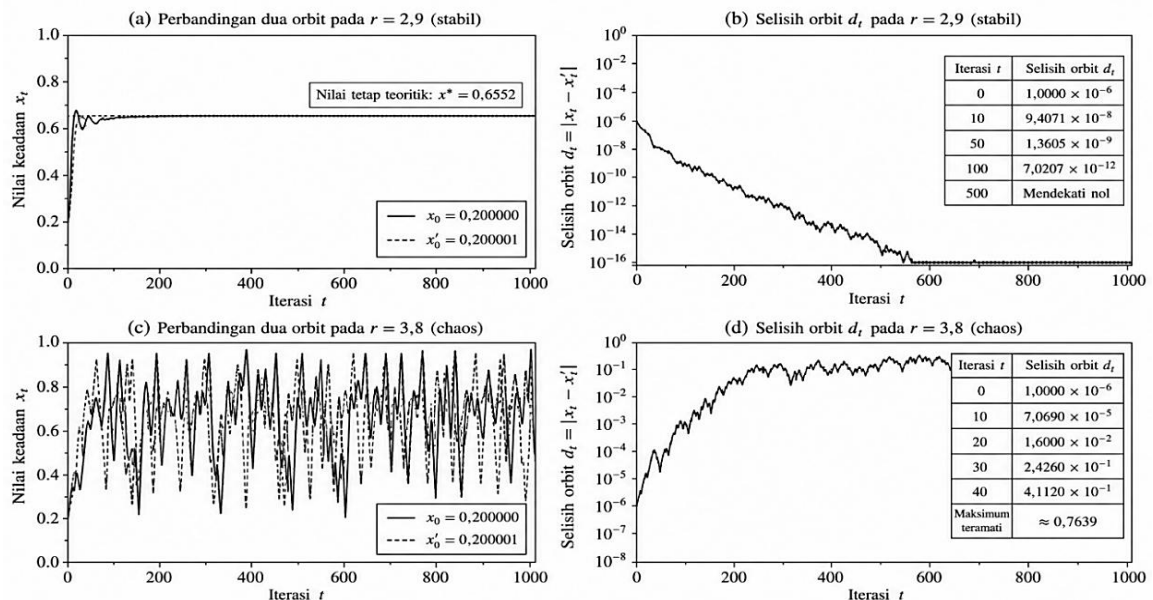
Tabel 5. Nilai eksponen Lyapunov pada parameter representatif

Nilai r	Pola Dinamika	Eksponen Lyapunov λ	Interpretasi
0.8	Menuju titik tetap nol	-0.2231	Stabil
2.5	Menuju titik tetap nonnol	-0.6931	Stabil
2.9	Titik tetap mendekati bifurkasi	-0.1054	Stabil mendekati transisi
3.0	Batas kehilangan kestabilan	-0.0021	Mendekati bifurkasi
3.2	Orbit periode-2	-0.9163	Periodik stabil
3.5	Orbit periode-4	-0.8725	Periodik stabil
3.55	Orbit periode-8	-0.0981	Periodik stabil mendekati kompleks
3.8	Orbit kompleks	0.4146	<i>Chaos</i>
3.83	Orbit periode-3	-0.3724	Periodic window

Berdasarkan Tabel 5, eksponen Lyapunov memberikan konfirmasi numerik terhadap hasil deret waktu dan diagram bifurkasi. Orbit yang stabil dan periodik memiliki nilai $\lambda < 0$, sedangkan wilayah *chaos* ditandai oleh nilai $\lambda > 0$. Dengan demikian, identifikasi dinamika *chaos* pada penelitian ini tidak hanya didasarkan pada tampilan orbit yang tidak teratur, tetapi juga didukung oleh indikator numerik.

3.5 Hasil Pengujian Sensitivitas terhadap Kondisi Awal

Pengujian sensitivitas terhadap kondisi awal dilakukan untuk memperlihatkan secara langsung perbedaan perilaku orbit pada wilayah stabil dan wilayah *chaos*. Pengujian ini menggunakan dua kondisi awal yang sangat berdekatan, yaitu $x_0 = 0.200000$ dan $x'_0 = 0.200001$, sehingga selisih awal keduanya sebesar 10^{-6} . Dua parameter digunakan sebagai pembandingan, yaitu $r = 2.9$ untuk mewakili wilayah stabil dan $r = 3.8$ untuk mewakili wilayah *chaos*.



Gambar 5. Sensitivitas kondisi awal pada dinamika stabil dan dinamika *chaos*

Hasil pengujian disajikan pada Gambar 5. Pada $r = 2.9$, dua orbit yang dimulai dari kondisi awal berbeda sangat kecil bergerak menuju keadaan jangka panjang yang sama. Selisih orbit memang sempat berubah pada iterasi awal, tetapi kemudian semakin kecil hingga mendekati nol. Hal ini menunjukkan bahwa pada wilayah stabil, perbedaan kecil pada kondisi awal tidak menghasilkan perbedaan perilaku jangka panjang.

Pada $r = 3.8$, hasil yang diperoleh berbeda. Dua orbit yang pada awalnya hampir sama mulai menunjukkan pemisahan setelah beberapa iterasi. Selisih awal sebesar 10^{-6} berkembang menjadi 7.0690×10^{-5} pada iterasi ke-10, kemudian meningkat menjadi 0.0160 pada iterasi ke-20, 0.2426 pada iterasi ke-30, dan 0.4112 pada iterasi ke-40. Selama pengamatan, selisih maksimum yang muncul mencapai sekitar 0.7639. Hasil ini menunjukkan bahwa pada parameter *chaos*, perubahan awal yang sangat kecil dapat berkembang menjadi perbedaan orbit yang besar.

Tabel 6. Hasil pengujian sensitivitas terhadap kondisi awal

Iterasi t	d_t pada $r = 2.9$	d_t pada $r = 3.8$
0	1.0000×10^{-6}	1.0000×10^{-6}
10	9.4071×10^{-8}	7.0690×10^{-5}
20	3.1592×10^{-8}	0.0160
30	1.1106×10^{-8}	0.2426
40	3.8935×10^{-9}	0.4112
50	1.3605×10^{-9}	0.4357
100	7.0207×10^{-12}	0.3906
500	Mendekati nol	0.4855
1000	Mendekati nol	0.1409

Berdasarkan Tabel 6, perbedaan antara dinamika stabil dan dinamika *chaos* tampak jelas. Pada $r = 2.9$ selisih dua orbit semakin kecil dan akhirnya mendekati nol. Sebaliknya, pada $r = 3.8$, selisih dua orbit meningkat secara signifikan setelah beberapa iterasi. Hasil ini konsisten dengan nilai eksponen Lyapunov pada Subbab 3.4, yaitu negatif pada $r = 2.9$ dan positif pada $r = 3.8$. Dengan demikian, pengujian sensitivitas kondisi awal memperkuat kesimpulan bahwa $r = 3.8$ menghasilkan dinamika *chaos*.

3.6 Sintesis Hasil Analitik, Komputasional, dan Pembahasan Komparatif

Hasil penelitian menunjukkan bahwa dinamika model logistik diskrit dapat dijelaskan secara konsisten melalui gabungan analisis matematis dan simulasi komputasi. Analisis kestabilan lokal menunjukkan bahwa titik tetap nol stabil pada $0 < r < 1$, sedangkan titik tetap nonnol stabil pada $1 < r < 3$. Ketika parameter mencapai $r = 3$, titik tetap nonnol kehilangan kestabilannya dan bifurkasi pertama mulai muncul. Hasil ini didukung oleh simulasi deret waktu dan diagram bifurkasi yang memperlihatkan perubahan dari satu titik tetap menuju orbit periodik.

Pada rentang $3 < r < 3.57$, model menunjukkan proses *period-doubling cascade*. Orbit yang semula periode-2 berkembang menjadi periode-4, periode-8, dan seterusnya. Namun, hasil eksponen Lyapunov menunjukkan bahwa orbit periodik tersebut masih stabil karena nilai λ tetap negatif. Hal ini menunjukkan bahwa bifurkasi tidak langsung menghasilkan dinamika *chaos*, tetapi berlangsung melalui tahapan peningkatan periode orbit terlebih dahulu. Dengan demikian, transisi dinamika model logistik diskrit terjadi secara bertahap, bukan melalui perubahan mendadak dari titik tetap stabil menuju *chaos*.

Dinamika *chaos* mulai teridentifikasi secara kuat pada parameter $r = 3.8$. Pada parameter ini, grafik deret waktu menunjukkan pola tidak periodik, diagram bifurkasi menunjukkan sebaran orbit kompleks, eksponen Lyapunov bernilai positif sebesar 0.4146, dan pengujian sensitivitas kondisi awal menunjukkan divergensi dua orbit yang dimulai dari selisih awal 10^{-6} . Keempat indikator tersebut saling mendukung, sehingga klasifikasi *chaos* pada $r = 3.8$ tidak hanya didasarkan pada tampilan visual, tetapi juga diperkuat oleh ukuran numerik dan pengujian sensitivitas terhadap kondisi awal.

Selain itu, penelitian ini menunjukkan bahwa wilayah parameter tinggi tidak seluruhnya bersifat *chaos*. Pada sekitar $r = 3.83$, model kembali menghasilkan orbit periode-3. Hasil ini terlihat pada grafik deret waktu, diagram bifurkasi, dan nilai eksponen Lyapunov yang kembali negatif sebesar -0.3724 . Dengan demikian, $r = 3.83$ dapat dikategorikan sebagai *periodic window*. Temuan ini penting karena menunjukkan bahwa wilayah setelah awal dinamika kompleks tetap memiliki interval orbit periodik yang teratur, sehingga tidak tepat apabila seluruh parameter setelah $r \approx 3.57$ langsung diklasifikasikan sebagai *chaos*.

Dibandingkan dengan penelitian terkait, kajian ini memiliki posisi yang berbeda karena tidak mengembangkan model baru, tetapi mempertahankan model logistik diskrit standar sebagai model acuan. Bucolo et al. (2022) menggunakan model logistik sebagai dasar dalam kajian peta diskrit multidimensi, sedangkan Al-Kaff et al. (2024) menggunakan peta logistik terhubung pada model mangsa–pemangsa diskrit. Xu et al. (2023) dan Gao dan Kan (2025) mengembangkan bentuk peta logistik yang dimodifikasi untuk memperoleh karakteristik dinamika yang lebih kompleks. Sementara itu, Nazish et al. (2025) menggunakan indikator dinamika untuk mengevaluasi *enhanced logistic map* bagi pembangkitan bit semu-acak. Berbeda dari penelitian-penelitian tersebut, penelitian ini menekankan integrasi analisis kestabilan lokal, deret waktu, diagram bifurkasi, eksponen Lyapunov, dan sensitivitas kondisi awal pada model standar.

Penelitian ini juga berbeda dari studi pada model diskrit yang lebih kompleks. Suryanto et al. (2025) menganalisis model predator–mangsa diskrit berorde fraksional dengan pemanenan dan kendali *chaos*, sedangkan penelitian ini membatasi objek pada model satu dimensi tanpa mekanisme kendali. Pembatasan tersebut membuat hubungan antarindikator dinamika dapat dijelaskan secara lebih langsung. Dari sisi implementasi komputasi, penelitian ini juga belum membahas pengaruh presisi digital terhadap orbit yang dihasilkan. Li et al. (2019) menunjukkan bahwa peta *chaotic* dalam lingkungan digital dapat dianalisis melalui state-mapping networks untuk memahami perubahan perilaku akibat representasi keadaan yang terbatas. Oleh karena itu, aspek presisi numerik, representasi digital, dan dinamika peta dalam lingkungan komputasi dapat menjadi arah pengembangan penelitian selanjutnya.

**Tabel 7.** Sintesis hasil analitik dan komputasional model logistik diskrit

Nilai Parameter	Hasil Utama	Indikator Pendukung	Interpretasi
$0 < r < 1$	Orbit menuju nol	Kestabilan lokal dan deret waktu	Titik tetap nol stabil
$1 < r < 3$	Orbit menuju titik tetap nonnol	Kestabilan lokal, deret waktu, $\lambda < 0$	Titik tetap nonnol stabil
$r = 3$	Titik tetap kehilangan kestabilan	$\lambda \approx 0$, diagram bifurkasi	Bifurkasi pertama
$3 < r < 3.57$	Orbit periode-2, 4, 8, dan seterusnya	Deret waktu, diagram bifurkasi, $\lambda < 0$	<i>Period-doubling cascade</i>
$r = 3.8$	Orbit tidak periodik dan sensitif	$\lambda = 0.4146$, sensitivitas kondisi awal	<i>Chaos</i>
$r = 3.83$	Orbit periode-3	Diagram bifurkasi dan $\lambda = -0.3724$	Periodic window

Secara keseluruhan, hasil penelitian menunjukkan bahwa perubahan parameter r menyebabkan transisi dinamika yang terstruktur, mulai dari titik tetap stabil, bifurkasi, orbit periodik, dinamika *chaos*, hingga *periodic windows*. Kontribusi utama penelitian ini adalah penyajian kerangka evaluasi komputasional yang menghubungkan bukti analitik, visual, dan numerik secara terpadu. Pendekatan ini dapat digunakan sebagai dasar untuk menganalisis model diskrit nonlinier lain yang memiliki struktur dinamika lebih kompleks.

4. KESIMPULAN

Penelitian ini berhasil menjawab permasalahan mengenai bagaimana variasi parameter kendali memengaruhi perubahan dinamika model logistik diskrit nonlinier serta bagaimana dinamika kompleks dapat diidentifikasi secara lebih meyakinkan melalui pendekatan analitik dan komputasional yang terpadu. Hasil analisis menunjukkan bahwa model memiliki perubahan perilaku yang terstruktur: pada $r = 0$, orbit langsung menuju titik tetap nol; pada rentang $0 < r < 1$, titik tetap nol bersifat stabil; pada rentang $1 < r < 3$, orbit berkonvergensi menuju titik tetap nonnol yang stabil; sedangkan pada $r = 3$, titik tetap nonnol kehilangan kestabilannya sehingga menjadi awal munculnya bifurkasi periode-2. Peningkatan parameter berikutnya menghasilkan orbit periode-2, periode-4, dan periode-8 melalui mekanisme *period-doubling cascade* sebelum model memasuki wilayah dinamika yang semakin kompleks. Pada $r = 3.8$, pola orbit yang tidak periodik pada simulasi deret waktu, sebaran orbit pada diagram bifurkasi, nilai eksponen Lyapunov yang positif, serta divergensi dua orbit dengan kondisi awal sangat berdekatan secara konsisten menunjukkan terjadinya dinamika *chaos*. Penelitian ini juga menunjukkan bahwa wilayah parameter tinggi tidak seluruhnya bersifat *chaos*, karena pada sekitar $r = 3.83$ muncul kembali orbit periode-3 sebagai *periodic window* yang didukung oleh nilai eksponen Lyapunov negatif. Dengan demikian, hasil penelitian menegaskan bahwa identifikasi dinamika model logistik tidak memadai apabila hanya didasarkan pada pengamatan visual, tetapi perlu didukung oleh keterkaitan antara analisis kestabilan, simulasi deret waktu, diagram bifurkasi, eksponen Lyapunov, dan sensitivitas terhadap kondisi awal. Kontribusi penelitian ini terletak pada penyajian kerangka evaluasi komputasional yang sistematis dan dapat direplikasi untuk model logistik diskrit standar sebagai model acuan dalam kajian sistem dinamik nonlinier. Keterbatasan penelitian ini adalah penggunaan model satu dimensi dengan satu parameter kendali, pengujian sensitivitas yang hanya dilakukan pada parameter representatif tertentu, serta belum dianalisisnya pengaruh presisi numerik atau implementasi digital terhadap hasil orbit. Oleh karena itu, penelitian selanjutnya dapat mengembangkan kajian pada model logistik termodifikasi, sistem diskrit multidimensi, model dengan mekanisme kendali atau gangguan eksternal, serta analisis presisi komputasi untuk memperoleh pemahaman yang lebih luas mengenai dinamika sistem nonlinier kompleks.

REFERENCES

- Al-Kaff, M. O., El-Metwally, H. A., Elsadany, A.-E. A., & Elabbasy, E. M. (2024). Exploring chaos and bifurcation in a discrete prey–predator based on coupled logistic map. *Scientific Reports*, 16118. <https://doi.org/10.1038/s41598-024-62439-8>
- Alawida, M. (2024). Enhancing logistic chaotic map for improved cryptographic security in random number generation. *Journal of Information Security and Applications*, 80, 103685. <https://doi.org/10.1016/j.jisa.2023.103685>
- Bacciotti, A. (2022). *Discrete dynamics: Basic theory and examples*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-95092-7>
- Bourekouche, H., Belkacem, S., & Messaoudi, N. (2024). Lightweight medical image encrypting and decrypting algorithm based on the 3D intertwining logistic map. *International Journal of Informatics and Applied Mathematics*, 6(2), 46–62. <https://doi.org/10.53508/ijiam.1405959>
- Bucolo, M., Buscarino, A., Fortuna, L., & Gagliano, S. (2022). Multidimensional discrete chaotic maps. *Frontiers in Physics*, 10, 862376. <https://doi.org/10.3389/fphy.2022.862376>
- De Leo, R., & Yorke, J. A. (2021). The graph of the logistic map is a tower. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 41(11), 5243–5269. <https://doi.org/10.3934/dcds.2021075>
- Dilão, R. (2023). *Dynamical system and chaos: An introduction with applications*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-25154-2>



- Fan, C., & Ding, Q. (2019). Analysing the dynamics of digital chaotic maps via a new period search algorithm. *Nonlinear Dynamics*, 97(1), 831–841. <https://doi.org/10.1007/s11071-019-05015-4>
- Galias, Z. (2025). Rigorous numerical study of the density of periodic windows for the logistic map. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 35(1), 013143. <https://doi.org/10.1063/5.0250869>
- Gao, S., & Kan, B. (2025). Chaos of the new multiplicative logistic map. *Scientific Reports*, 15, 43743. <https://doi.org/10.1038/s41598-025-28695-y>
- Hua, Z., Zhou, B., & Zhou, Y. (2019). Sine chaotification model for enhancing chaos and its hardware implementation. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 66(2), 1273–1284. <https://doi.org/10.1109/TIE.2018.2833049>
- Kuznetsov, Y. A. (2023). *Elements of applied bifurcation theory* (5th ed.). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-22007-4>
- Li, C., Feng, B., Li, S., Kurths, J., & Chen, G. (2019). Dynamic analysis of digital chaotic maps via state-mapping networks. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 66(6), 2322–2335. <https://doi.org/10.1109/TCSI.2018.2888688>
- Naik, R. B., & Singh, U. (2024). A review on applications of chaotic maps in pseudo-random number generators and encryption. *Annals of Data Science*, 11(1), 25–50. <https://doi.org/10.1007/s40745-021-00364-7>
- Nazish, M., Javid, M., & Banday, M. T. (2025). Enhanced logistic map with infinite chaos and its applicability in lightweight and high-speed pseudo-random bit generation. *Cybersecurity*, 9, 24. <https://doi.org/10.1186/s42400-024-00319-4>
- Suryanto, A., Darti, I., & Cahyono, E. (2025). Bifurcation analysis and chaos control of a discrete-time fractional order predator-prey model with Holling type II functional response and harvesting. *Chaos Theory and Applications*, 7(1), 87–98. <https://doi.org/10.51537/chaos.1581247>
- Suryanto, A., Darti, I., & T. (2025). Stability and bifurcation analysis in a discrete-time logistic model under harvested and feedback control. *Journal of Mathematics and Computer Science*, 36(3), 251–262. <https://doi.org/10.22436/jmcs.036.03.01>
- Xu, B., Ye, X., Wang, G., Huang, Z., & Zhang, C. (2023). A fractional-order improved quantum logistic map: Chaos, 0-1 testing, complexity, and control. *Axioms*, 12(1), 94. <https://doi.org/10.3390/axioms12010094>
- Zaytsev, A., Kravchenko, V., & Shirapov, D. (2024). An approach to logical-mathematical computer modeling of linear and nonlinear dynamical systems. *E3S Web of Conferences*, 583, 06014. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202458306014>
- Zhao, W., & Ma, C. (2024). Modification of intertwining logistic map and a novel pseudo random number generator. *Symmetry*, 16(2), 169. <https://doi.org/10.3390/sym16020169>